Quatre angles universels que nous indique la gravité

Jean-Baptiste HIRIART-URRUTY
Institut de mathématiques
Université PAUL SABATIER
118, route de Narbonne
31062 TOULOUSE Cedex 9, France

Résumé.
Dans cette note, nous explorons les positions d'équilibre prises, sous la seule action de la pesanteur, par quatre objets familiers suspendus par une de leur extrémité, à savoir : le demi-cercle et le demi-disque dans le plan, la demi-sphère et la demi-boule dans l'espace.

Introduction

La géométrie du plan, notamment celle qui concerne l'étude des triangles, fait apparaître assez naturellement des angles que l'on retrouve dans des situations diverses et variées ; c'est le cas de l'angle droit mais aussi celui de l'angle de 120° (que l'on trouve en divisant le tour du quadrant en trois parts égales). La physique n'est pas en reste, elle qui nous fait étudier les positions d'équilibre d'objets soumis à des forces extérieures comme la gravitation. La courte note que nous présentons a pour but de mettre en lumière quatre angles particuliers, dont le caractère "universel" nous a paru intéressant à souligner et commenter.

Le cercle et le disque (en 2D), la sphère et la boule (en 3D), sont les objets les plus familiers de la géométrie, leur caractère d'universalité, comme d'optimalité d'ailleurs (eu égard à des critères comme l'aire ou le volume), est bien établi et connu. Les objets que nous considérons ici sont différents, il s'agit de la "moitié" des dits objets, à savoir : le demi-cercle et le demi-disque (dans le plan), la demi-sphère et la demi-boule (dans l'espace). Lorsqu'ils sont suspendus par une de leur extrémité, ces objets, sous la seule action de la pesanteur, prennent une position d'équilibre où sont mis en évidence les quatre angles d'inclinaison dont on va parler.

I Le questionnement

Commençons par un demi-cercle matériel de rayon R suspendu à la verticale par l'une des extrémités (voir la figure 1 ci-dessous) ; ici comme dans tous les autres cas qui vont suivre, la densité de masse sera supposée uniforme, ce qui fait qu'elle n'influencera pas les calculs de centres de gravité et d'angles d'inclinaison que nous ferons. Comme exemples, cela peut être : une boucle d'oreille ($R = 1\ cm$), une sculpture métallique comme on en voit parfois (disons $R = 1\ m$), ou bien carrément un demi-cercle en ciment armé d'un rayon de $1\ km$...Nous reproduisons les mêmes schémas avec un demi-disque plein (de rayon R).

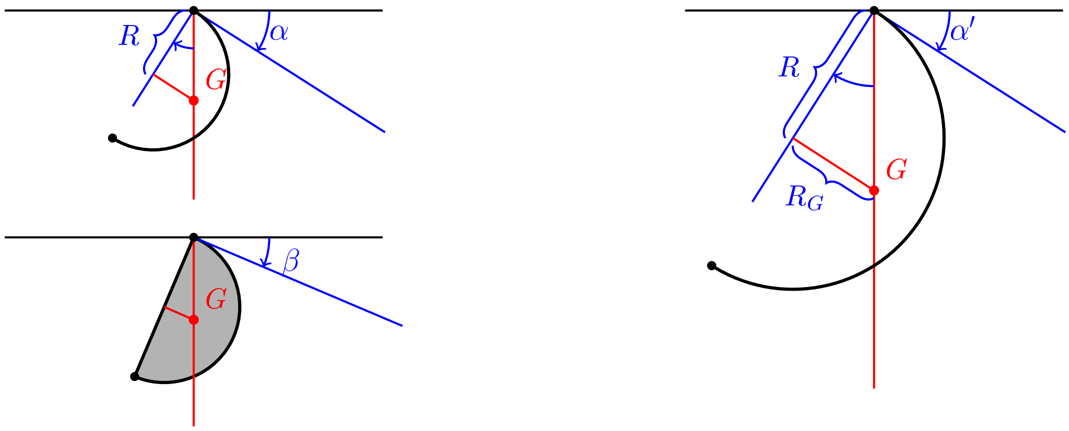

Figure 1 –

À l'étape suivante, nous considérons une demi-sphère (creuse) de rayon R, également suspendue à la verticale à l'un des points du cercle constituant sa base ; certains sièges de salon très design sont conçus de cette manière. Enfin c'est la demi-boule (ou demi-sphère pleine) que nous suspendons à la verticale (voir la figure 2).

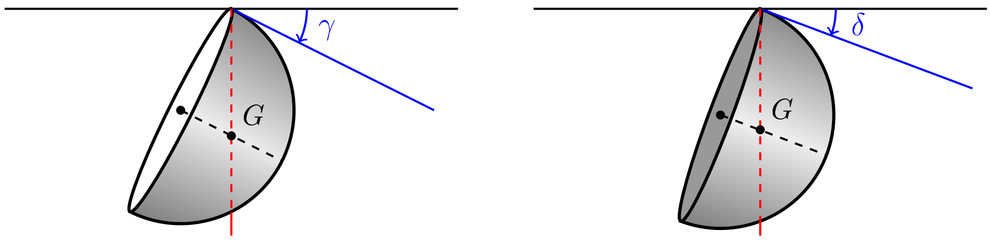

Figure 2 –

Voici deux questions qu'on peut évoquer à propos des angles d'inclinaison α, β, γ, δ signalés sur les figures, et que nous avons eu l'occasion de poser autour de nous...avec parfois des réponses contraires à ce qu'on appelle “le bon sens physique”, lequel n'est pas toujours si bien répandu.

Question 1. “A vue de nez” (en occitanie on dit “a vista de nas”), comment se comparent les angles correspondant aux situations “creuses” avec ceux des situations “pleines” ? En clair, l'angle α vous paraît-il devoir être plus grand que l'angle β ? Même question concernant les angles γ et δ.

Question 2. On modifie la taille de tous ces objets en augmentant leur rayon R. Ainsi, les centres de gravité sont situés de plus en plus bas par rapport au point d'attache, de plus en plus proches (relativement) de la verticale. Comment varient les angles α, β, γ, δ en fonction de R ?

Les réponses à la première question furent que, oui en effet, dans les situations “pleines”, la masse est plus répartie et donc les objets se stabilisent à l'équilibre davantage à la verticale ; en clair α est plus grand que β, γ est plus grand que δ. Ceci sera démontré par le calcul plus loin.

Les réponses à la deuxième question furent, à quelques exceptions près, comme suit : quand R augmente, les quatre angles α, β, γ, δ diminuent...pas de manière linéaire, mais diminuent. *Nous démontrons qu'il n'en est rien, que ces quatre angles sont indépendants du rayon R, revêtant ce caractère universel que nous annoncions.* Ainsi, la boucle d'oreille, la sculpture métallique et le demi-cercle de ciment armé ont la même inclinaison vis-à-vis de l'horizontale (ou de la verticale).

II Les réponses

Dans les quatre cas considérés, c'est la position du centre de gravité qui donnera, après un raisonnement de trigonométrie simple, la valeur de l'angle d'inclinaison recherché. Ici, le centre de gravité, point d'application de la résultante des forces de gravité, se trouve à la verticale du point de suspension : c'est l'argument essentiel. Il n'y a plus qu'à determiner les rayons R_G , les angles θ s'ensuivront du fait que $\tan\theta = \frac{R_G}{R}$.

II.1 Les deux premiers cas (dans le plan vertical)

Pour déterminer R_G , c'est l'occasion ou jamais d'appliquer les deux beaux théorèmes de Pappus-Guldin, et c'est d'ailleurs comme cela que ces calculs de R_G sont faits dans la plupart des ouvrages (*cf.* [1, 2, 3] par exemple).

L'aire $\mathcal{A}$ engendrée par la rotation du demi-cercle de rayon R autour de la verticale est égal au produit de la longueur de ce demi-cercle par la longueur du cercle décrit par le centre de gravité G (situé à la distance R_G du centre du demi-cercle) ; $\mathcal{A}$ se trouve être ici l'aire de la sphère de rayon R :

$$\mathcal{A} = (\pi R)(2\pi R_G) = 4\pi R^2,$$

d'où $R_G = \frac{2R}{\pi}$, et donc

$$\alpha = \arctan(\frac{R_G}{R}) = \arctan(\frac{2}{\pi}) \simeq 32,48°. \tag{1}$$

Le volume $\mathcal{V}$ engendré par la rotation du demi-disque plein de rayon R autour de la verticale est égal au produit de l'aire de ce demi-disque par la longueur du cercle décrit par le centre de gravité G (situé à la distance r_G du centre du demi-disque) ; $\mathcal{V}$ est connu puisqu'il s'agit du volume de la sphère de rayon R :

$$\mathcal{V} = (\frac{\pi R^2}{2})(2\pi R_G) = \frac{4}{3}\pi R^3,$$

d'où $R_G = \frac{4R}{3\pi}$, et

$$\beta = \arctan(\frac{4}{3\pi}) \simeq 23°. \tag{2}$$

II.2 Les deux cas suivants, dans l'espace

Les calculs de centres de gravité suivants sont classiques (voir [2, 3] par exemple).

Dans le cas de la demi-sphère creuse, $R_G = \frac{R}{2}$, de sorte que

$$\gamma = \arctan(\frac{1}{2}) \simeq 26,56^\circ. \tag{3}$$

Pour ce qui est de la demi-boule pleine, $R_G = \frac{3R}{8}$, d'où

$$\delta = \arctan(\frac{3}{8}) \simeq 20,55^\circ. \tag{4}$$

Ainsi, pour les quatre objets considérés, ces quatre angles $\mathbf{32,48}^\circ$, $\mathbf{23}^\circ$, $\mathbf{26,56}^\circ$, $\mathbf{20,55}^\circ$ apparaissent indépendants de la nature du matériau et, surtout, du rayon R qui fixe leur taille.

Remerciements
Des échanges à la cafétéria de l'université avec J.-Ph. Pérez, collègue professeur de Physique à l'université Paul Sabatier de Toulouse, m'ont permis de préciser certains éléments de cette présentation. Je l'en remercie.

Références.

1. M. Lofficial et D. Tanré, *Intégrales curvilignes et de surface.* Éditions Ellipses, 2006.
2. J.-P. Migeon, *Maths et Physique : 40 thèmes d'étude.* Éditions Tech et Doc, 1996.
3. J-Ph. Pérez, *Mécanique.* Éditions Dunod, 2001.